RRPA88010167 (5.P)

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

Carlson 不等式之推廣

計畫編號： NSC 88-2115-M-032-007

執行期間： 87年08月01日至88年07月31日

計畫主持人：楊國勝

共同主持人：

處理方式：☑可立即對外提供參考
(請打√) ☐一年後可對外提供參考
☐兩年後可對外提供參考
(必要時，本會得展延發表時限)

執行單位：淡江大學數學系

中華民國 88年 9月 22日

ABSTRACT

Some generalizations of Carlson's inequality

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \sqrt{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/4}$$

and

$$\int_0^\infty |f(x)|\, dx \le \sqrt{\pi} \left(\int_0^\infty f^2(x)\, dx\right)^{1/4} \left(\int_0^\infty x^2 f^2(x)\, dx\right)^{1/4}$$

are established in this paper

Key words: Carlson's inequality, Schwarz inequality Hölder inequality

摘　　要

本文我們完成了Carlson不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right)^{1/4}$$

及

$$\int_0^{\infty}|f(x)|dx \le \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\infty} f^2(x)dx\right)^{1/4}\left(\int_0^{\infty} x^2 f^2(x)dx\right)^{1/4}$$

一些推廣

關鍵詞：Carlson不等式，Schwarz不等式，Hölder不等式

Carlson不等式之研究

Some generalizations of Carlson's inequalities

計劃編號：NSC-88-2115-M-032-007
執行期限：87年08月01日至88年07月31日

主持人：楊國勝 淡江大學數學系教授

一. 計劃緣由與目的：

在1934年 Carlson 建立了下列兩個不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\infty}|f(x)|dx \le \sqrt{\pi}\left(\int_0^{\infty} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^{\infty} x^2 f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{4}}$$

其中 $\sqrt{\pi}$ 為最佳常數.

本研究之目的,在建立上述兩不等式之推廣式.

二. 研究成果：

本研究主要獲得下列兩個定理：

定理1. 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為一實數列. $g:[0,\infty)\to R$ 為可微分函數且滿足 $g(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $0 < m = \inf_{x\in[0,\infty)} g'(x) < \infty$. 又設 p. α 及 r 為實數滿足 $p>1$, $0<\alpha\le 1$. 則

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)^{2p} < \left(\frac{\pi}{\alpha m}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} g^{1-\alpha}(n)|a_n|^{p(1+2r-rp)}\right)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} g^{1+\alpha}(n)|a_n|^{p(1+2r-rp)}\right)\left(\sum |a_n|^{rp}\right)^{2(p-2)}$$

定理2 若 $f, g:[0,\infty)\to R$ 為兩個 Lebesgue 可測函數, g 為可微函數滿足 $g(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $0 < m = \inf_{0\in[0,\infty)} g'(x) < \infty$. 又設 p, q, α 及 r 為實數滿足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>q>1$, $\alpha>0$. 則

$$\left(\int_0^{\infty}|f(x)|dx\right)^{2p} \le \left(\frac{\pi}{\alpha m}\right)^2\left(\int_0^{\infty} g^{1-\alpha}(x)|f(x)|^{p(1+2r-rp)}dx\right)\left(\int_0^{\infty} g^{1+\alpha}(x)|f(x)|^{p(1+2r-rp)}dx\right)\left(\int_0^{\infty}|f(x)|^{rp}dx\right)^{2(p-2)}.$$

附註：本研究將發表於 Indian J. Pure appl. Math. 期刊上, 預期 1999 10月刊出.

參　考　文　獻

※參考文獻之中外文期刊、書籍按文中出現先後次序排列編號，須依次列出作者、期刊名、卷冊數、年月等，文中引用時，一律用括號及號碼附在文中。

1. E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities,* 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.
2. S. Barza and E. C. Popa, *Tamkang J. Math.* 29:1 (1998),59-64.
3. J. Bergh, *J. Math. Anal. Appl.* 115 (1986), 574-577.
4. F. Carlson, *Ark. Mat. Astr. och Fysik* 25B (1934), 1-5.
5. J. Gustavsson and J. Peetre, *Studia Math.* 60 (1977), 33-59.
6. B. Kjellberg, *C. R. Dixiéme Congrés des Mathematiciens Scandinaves* (1946), Jul, Gjellerups Forlag, Copenhagen (1946), 333-340.
7. N. Ya. Kruglyak, L. Maligranda and L. E. Persson, *Studia Math.* 104 (1993), 161-180.
8. L. Maligranda and L. E. Persson, Inequalities and Interpolations, *Collect. Math.* 44 (1993), 183-201.
9. D. S. Mitrnović, J. E. Pečarič and A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis,* Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/Londen, (1993).